1

MATeMAtyka

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska

Zakres podstawowy

Ćwiczenia i zadania
dla szkół ponadgimnazjalnych

nowa era

1

MATeMAtyka

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska

Zakres podstawowy

Ćwiczenia i zadania
dla szkół ponadgimnazjalnych

nowa era

MATeMAtyka

Ćwiczenia i zadania *MATeMAtyka 1* uzupełniają podręcznik autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Doroty Ponczek *MATeMAtyka 1*, dopuszczony do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki na poziomie ponadgimnazjalnym w zakresie podstawowym.

Numer ewidencyjny podręcznika w wykazie MEN: 378/1/2011
Numer ewidencyjny podręcznika (spełniającego wymóg wieloletniości) w wykazie MEN: 378/1/2011/2015

ISBN 978-83-267-0904-3

Wydanie czwarte
Warszawa 2016

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Małgorzata Trzeciak
Współpraca redakcyjna: Monika Jankowska, Katarzyna Radzimińska
Konsultacje merytoryczne: Barbara Sasim-Leciejewska
Redakcja językowa: Monika Krzywoszyńska
Korekta językowa: Zofia Psota, Anna Wasilewska
Projekt graficzny okładki: Elżbieta Król
Fotografia na okładce: thinkstockphotos.com/Getty Images/iStockphoto
Projekt graficzny zeszytu ćwiczeń: Lech Chańko
Rysunki merytoryczne: Lech Chańko
Skład systemem TEX: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.
Al. Jerozolimskie 146D, 02-305 Warszawa
tel.: 22 570 25 80; faks: 22 570 25 81
infolinia: 801 88 10 10 (z telefonów stacjonarnych)
58 721 48 00 (z telefonów komórkowych)
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Druk i oprawa: DRUK-SERWIS Sp. z o.o. Ciechanów

Spis treści

Zadanie do rozwiązania w zeszycie.

* Zadanie trudniejsze.

Niebieskim paskiem oznaczono zadania wykraczające poza zakres podstawowy.

3. Funkcja liniowa

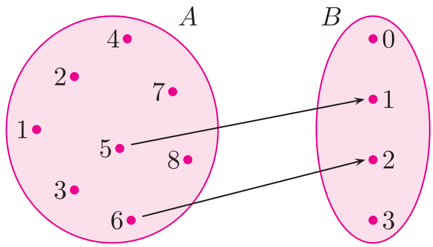
3.1. Sposoby opisu funkcji

1. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie $x \in A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ wartość $f(x) \in B = \{0, 1, 2, 3\}$ będącą resztą z dzielenia liczby x przez 4. Uzupełnij:

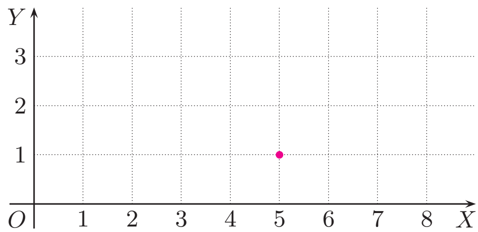
a) tabelę,

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$					1	2		

b) graf,



c) wykres.

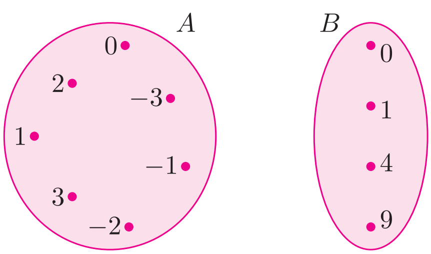


2. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ jej kwadrat. Przedstaw funkcję f za pomocą:

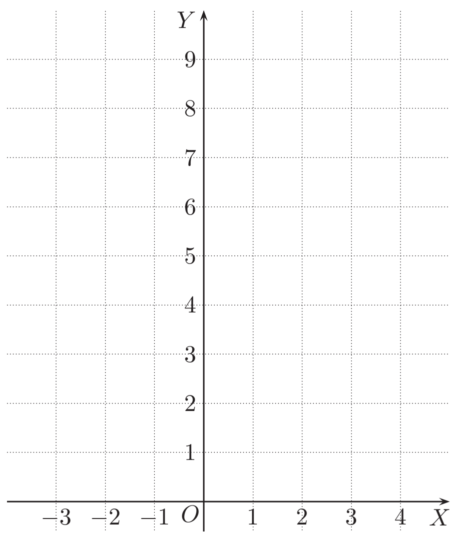
a) tabeli,

x							
$f(x)$							

b) grafu,



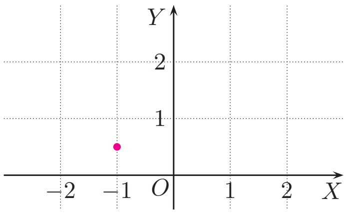
c) wykresu.



3. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Uzupełnij tabelę i wykres.

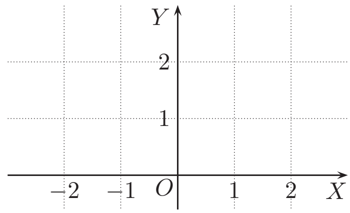
a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$		$\frac{1}{2}$			



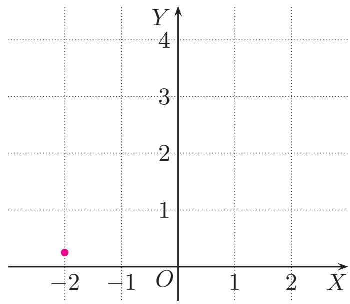
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



4. Uzupełnij tabelę i wykres funkcji $f(x) = 2^x$, której dziedziną jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

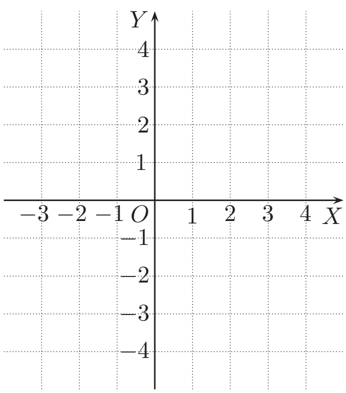
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					4



5. Sporządź tabelę i wykres funkcji f, której dziedziną jest zbiór $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

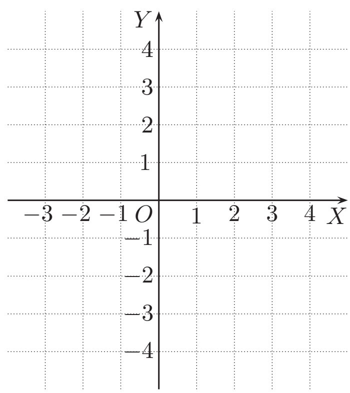
a) $f(x) = x - 3$

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$						



b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$						



6. Zbiór X jest zbiorem tych liczb naturalnych n, które spełniają nierówność $(n-1)^2 < (n-2)^2 + 15$. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie ze zbioru X resztę z jej dzielenia przez 2. Przedstaw funkcję f za pomocą tabeli i wykresu.

3.2. Wykres funkcji liniowej (1)

Funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi, nazywamy **funkcją liniową**. Wykresem funkcji liniowej jest prosta.
Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej.

7. Uzupełnij tabele. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych proste k, l, m i n.

k: $y = x$

x	0	1
y	0	1

m: $y = -x$

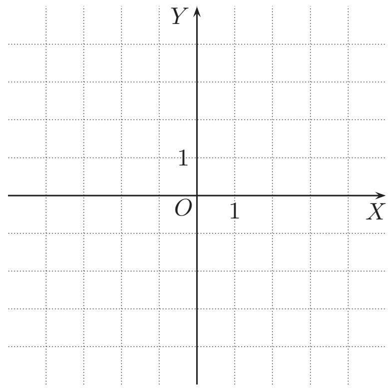
x	0	1
y		

l: $y = x + 3$

x	0	1
y		

n: $y = -x + 3$

x	0	1
y		



8. Cztery z poniższych równań opisują narysowane obok proste. Podpisz te proste. Naszkicuj prostą opisaną piątym równaniem.

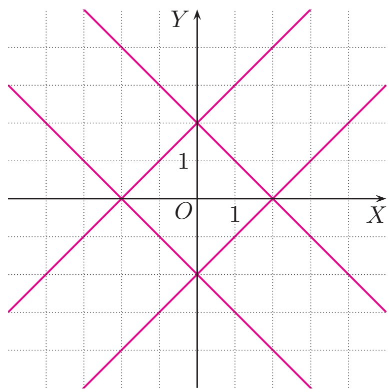
l_3: $y = -x + 1$

l_1: $y = -x + 2$

l_4: $y = x + 2$

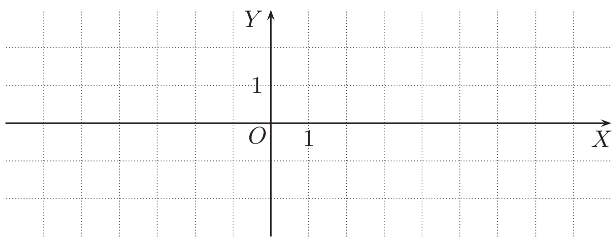
l_2: $y = -x - 2$

l_5: $y = x - 2$



9. Uzupełnij tabelę wartości funkcji: $f(x) = -\frac{1}{4}x$, $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$, $h(x) = -\frac{1}{4}x - 1$ dla podanych argumentów. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych proste przechodzące przez wyznaczone punkty.

x	-4	0	4
$f(x)$			
$g(x)$			
$h(x)$			



3.3. Wykres funkcji liniowej (2)

10. Wskaż pary prostych równoległych.

> Proste $y = ax + b$ i $y = a_1x + b_1$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = a_1$.

l_1: $y = 5x + 2$ $\quad$ l_3: $y = 1{,}5x + 2$

l_2: $y = 2x - 4$ $\quad$ l_4: $y = 5x - 11$ $\quad$ l_5: $y = \frac{3}{2}x - 4$ $\quad$ l_6: $y = \frac{3}{2} + 2x$

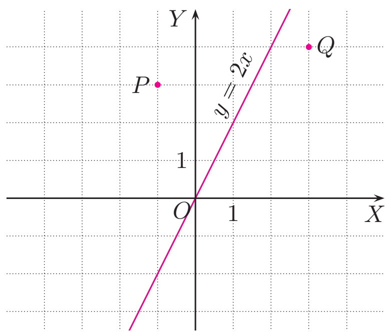
11. Wskaż pary prostych przecinających oś OY w tym samym punkcie.

> Prosta $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

l_1: $y = -3x + 0{,}25$ $\quad$ l_3: $y = 2x - 3$ $\quad$ l_5: $y = 4 - \pi x$

l_2: $y = -3x + 4$ $\quad$ l_4: $y = -3$ $\quad$ l_6: $y = -2x + \frac{1}{4}$

12. Napisz wzory funkcji, których wykresami są proste równoległe do prostej $y = 2x$ i przechodzące przez punkty P i Q. Naszkicuj te proste.



Punkt P ____________________

Punkt Q ____________________

13. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do podanej prostej i przechodząca przez punkt P.

a) $y = 3x - 1$, $P(2, 4)$

c) $y = \frac{3}{4}x - 2$, $P(-4, 2)$

b) $y = -2x + 7$, $P(3, -1)$

d) $y = -0{,}8x + 9$, $P(-5, -2)$

14. a) Napisz równania prostych, w których zawierają się boki czworokąta $ABCD$, jeśli wiadomo, że są one równoległe do boków czworokąta $A_1B_1C_1D_1$.

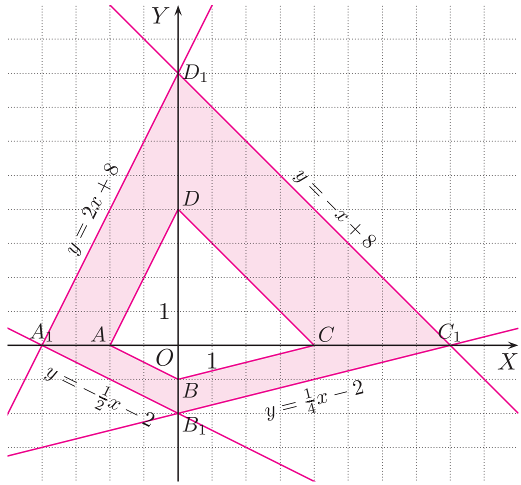
Prosta AB: ______________________

Prosta BC: ______________________

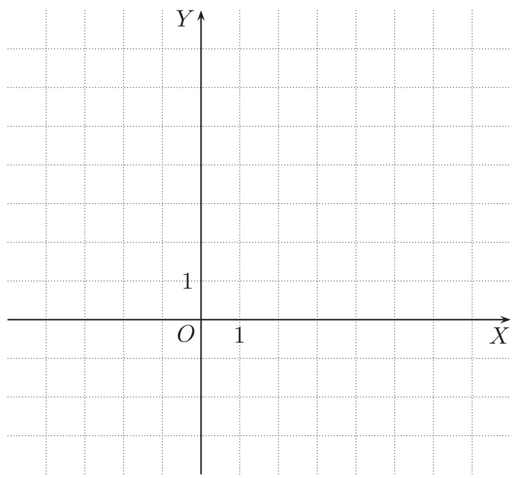
Prosta CD: ______________________

Prosta AD: ______________________

b) Oblicz pole zacieniowanego obszaru: ______________________



15. Punkty $(4, 0)$ i $(0, 3)$ są wierzchołkami równoległoboku, którego dwa boki zawierają się w prostych $y = 3x + 3$ i $y = \frac{1}{2}x - 2$. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się jego dwa pozostałe boki. Narysuj ten równoległobok i oblicz jego pole.



3.4. Własności funkcji liniowej

16. W ramce pokazano, jak wyznaczyć punkt przecięcia prostej $y = 3x + 4$ z osią OX. Postępując analogicznie, wyznacz punkt przecięcia podanej prostej z osią OX.

a) $y = -6x + 9$ b) $y = \frac{2}{3}x + 6$

> **Przykład**
>
> $y = 3x + 4$
>
> Dla $y = 0$ mamy:
>
> $0 = 3x + 4$
>
> $-3x = 4 \ / : (-3)$
>
> $x = -\frac{4}{3}$

17. Wyznacz miejsce zerowe funkcji f. Podaj współrzędne punktów przecięcia jej wykresu z osiami układu współrzędnych. Naszkicuj ten wykres.

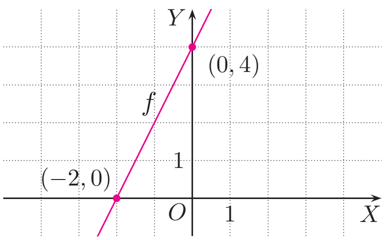
> Jeśli $a \neq 0$, to funkcja $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $x = -\frac{b}{a}$.

a) $f(x) = 2x + 4$

miejsce zerowe: $x = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2$

punkt przecięcia z osią OX: $(-2, 0)$

punkt przecięcia z osią OY: $(0, 4)$

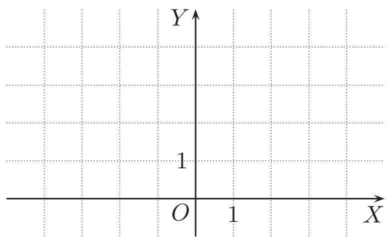


c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

miejsce zerowe: ______

punkt przecięcia z osią OX: ______

punkt przecięcia z osią OY: ______

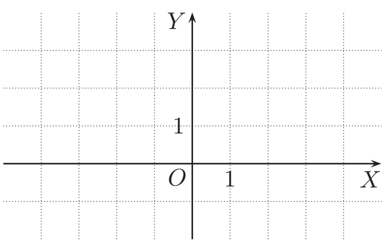


b) $f(x) = -3x + 3$

miejsce zerowe: ______

punkt przecięcia z osią OX: ______

punkt przecięcia z osią OY: ______

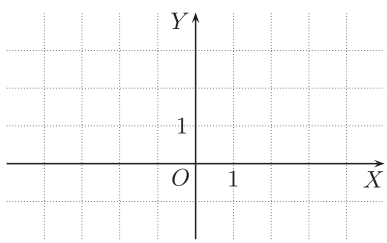


d) $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$

miejsce zerowe: ______

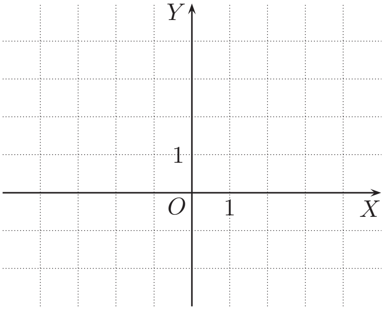
punkt przecięcia z osią OX: ______

punkt przecięcia z osią OY: ______

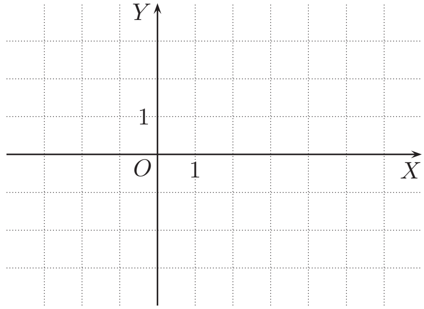


18. Naszkicuj prostą o podanym równaniu. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i tą prostą.

a) $y = 2x + 4$



b) $y = \frac{1}{3}x - 2$



Pole trójkąta: ______________

Pole trójkąta: ______________

19. Naszkicuj proste l i k. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi oraz osią OY.

a) $l : y = 2x - 4,$
$k : y = -x + 2$

b) $l : y = \frac{2}{3}x + 4,$
$k : y = -\frac{2}{3}x - 4$

c) $l : y = \frac{1}{2}x + 2,$
$k : y = -\frac{5}{4}x - 5$

20. Określ monotoniczność funkcji f.

Funkcja $f(x) = ax + b$ jest:
- rosnąca, gdy $a > 0$,
- stała, gdy $a = 0$,
- malejąca, gdy $a < 0$.

a) $f(x) = 0{,}003x - 8$ ______________

b) $f(x) = -\frac{13}{11}x + 4$ malejąca

c) $f(x) = (3{,}14 - \pi)x$ ______________

d) $f(x) = -7$ ______________

e) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}-3}x - \frac{1}{3}$ ______________

f) $f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x - 2$ ______________

21. Określ monotoniczność funkcji $f(x) = (4 - 2m)x - 7$, jeśli:

a) $m = \frac{13}{6}$, b) $m = 1{,}(9)$, c) $m = \sqrt{3}$, d) $m = 3(\sqrt{3} - 1)$.

22. Określ monotoniczność funkcji f w zależności od wartości parametru m.

a) $f(x) = (m + 3)x - 7$

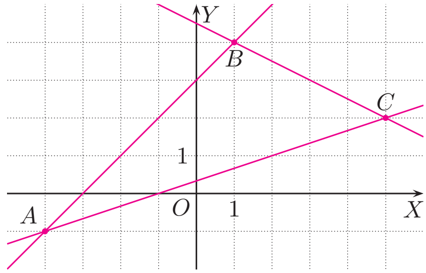
b) $f(x) = (2 - m)x + 4$

c) $f(x) = \left(5 - \frac{2}{3}m\right)x + 1$

d) $f(x) = |m|x - 3$

3.5. Równanie prostej na płaszczyźnie

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.



23. Dane są punkty: $A(-4, -1)$, $B(1, 4)$, $C(5, 2)$. Zapisz układ równań pozwalający wyznaczyć współczynniki a i b równania kierunkowego podanej prostej.

a) prosta AB:

$$\begin{cases} -1 = a \cdot (-4) + b \\ 4 = a \cdot 1 + b \end{cases}$$

b) prosta AC:

$$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

c) prosta BC:

$$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

24. Zapisz układ równań pozwalający wyznaczyć współczynniki a i b równania kierunkowego prostej przechodzącej przez punkty P i Q. Rozwiąż ten układ i zapisz równanie prostej PQ.

a) $P(2, 1)$, $Q(5, 4)$ b) $P(-1, -3)$, $Q(2, 3)$ c) $P(-2, 2)$, $Q(4, -1)$

25. Wyznacz równanie prostej PQ. Sprawdź, czy należy do niej punkt C.

a) $P(-2, 1)$, $Q(2, 5)$, $C(4, 8)$ b) $P(-1, 7)$, $Q(3, -1)$, $C(-2, 9)$

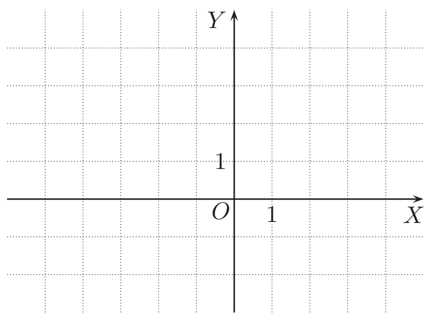
26. Naszkicuj proste o podanych równaniach.

l_1: $y = 3$ l_4: $x = -5$

l_2: $y = -2$ l_5: $y = 0$

l_3: $x = 4$ l_6: $x = 0$

Które z tych prostych nie są wykresami funkcji?



27. Zapisz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q.

a) $P(4, \frac{1}{2})$, $Q(-7, \frac{1}{2})$ b) $P(-6, 2)$, $Q(-6, -12)$ c) $P(\frac{7}{4}, \frac{12}{5})$, $Q(1\frac{3}{4}, 2\frac{3}{5})$

28. Oblicz pole prostokąta ograniczonego prostymi: $x = -1$, $x = 5$, $y = 4\frac{1}{2}$ i $y = 6\frac{1}{4}$.

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

29. Przekształć równanie ogólne prostej do postaci kierunkowej.

a) $3x - y - 4 = 0$

$-y = -3x + 4 \;/ \cdot (-1)$

$y = 3x - 4$

b) $-4x + 2y + 5 = 0$

c) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 3 = 0$

30. Przekształć równania ogólne prostych do postaci kierunkowych. Zaznacz równania opisujące tę samą prostą.

l_1: $x - 2y + 2 = 0$

l_3: $-\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$

l_5: $\frac{2}{3}x - y + 2 = 0$

l_2: $-2x + 3y - 6 = 0$

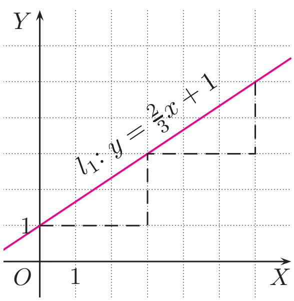
l_4: $3x + 2y - 6 = 0$

l_6: $-3x + 6y - 6 = 0$

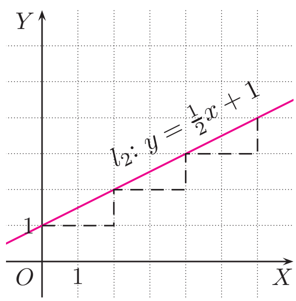
3.6. Współczynnik kierunkowy prostej

31. Dopasuj każdą z przedstawionych prostych do odpowiedniego opisu.

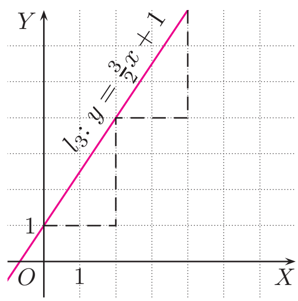
A.



B.

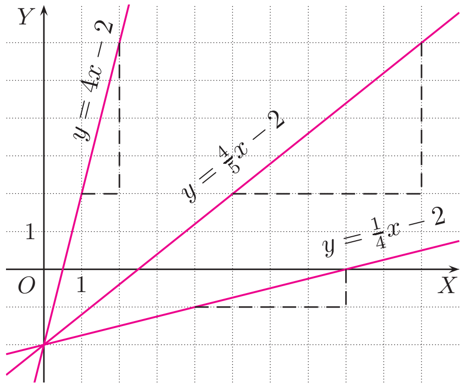


C.



Przyrostowi argumentu x o dwie jednostki odpowiada przyrost wartości funkcji o jedną jednostkę.	
Przyrostowi argumentu x o dwie jednostki odpowiada przyrost wartości funkcji o trzy jednostki.	
Przyrostowi argumentu x o trzy jednostki odpowiada przyrost wartości funkcji o dwie jednostki.	

32. Dla każdej z podanych prostych określ zależność między przyrostem argumentu x a odpowiadającym mu przyrostem wartości funkcji.



$y = 4x - 2$: __________

$y = \frac{1}{4}x - 2$: __________

$y = \frac{4}{5}x - 2$: __________

33. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty P i Q.

> Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez dwa różne punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) jest równy: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

a) $P(3,2)$, $Q(5,6)$

$a = \frac{6-2}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$

b) $P(1,3)$, $Q(4,2)$ c) $P(2,-1)$, $Q(-4,3)$ d) $P(-7, \frac{1}{2})$, $Q(-5, \frac{1}{4})$

34. Oblicz współczynnik kierunkowy i wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty E i F.

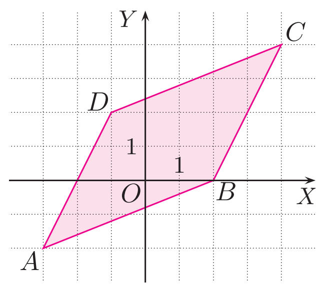
a) $E(-1,2)$, $F(2,8)$ c) $E(-2,2)$, $F(-6,0)$

b) $E(3,-4)$, $F(-6,-1)$ d) $E(-6,2)$, $F(3,-4)$

35. Odczytaj współrzędne wierzchołków równoległoboku przedstawionego na rysunku. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych zawierających:

a) boki równoległoboku,

b) przekątne równoległoboku.



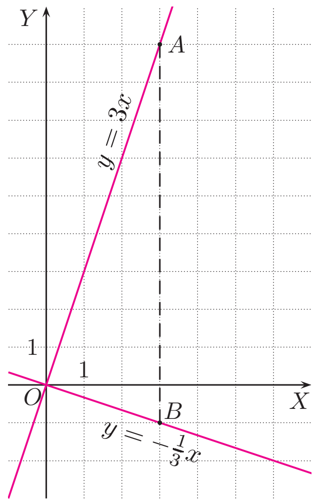
36. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej l.

a) l: $y = 4x + 2$, $P(1,3)$ c) l: $y = 0{,}125x - 0{,}25$, $P(-16,-3)$

b) l: $y = -\frac{1}{5}x + 2$, $P(20,9)$ d) l: $y = 7$, $P(3,-4)$

3.7. Warunek prostopadłości prostych

37. a) Sprawdź, korzystając z rysunku, czy $|OA| = 3\sqrt{10}$, $|OB| = \sqrt{10}$, $|AB| = 10$.



b) Wykaż, że $\triangle AOB$ jest prostokątny.

Proste $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ i $y = a_1x + b_1$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy
$$a_1 = -\frac{1}{a}$$

38. Podaj współczynnik kierunkowy prostej $y = a_1x - 3$ prostopadłej do prostej k.

a) k: $y = -7x + 7$

c) k: $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}$

b) k: $y = \frac{5}{6}x + 1$

d) k: $y = -\frac{7}{9}x - \frac{1}{9}$

39. Prosta l przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do prostej k. Wyznacz równanie prostej l.

a) k: $y = 2x - 7$, $P(0, 5)$

b) k: $y = -6x + 3$, $P(0, -\frac{1}{4})$

40. Zaznacz proste prostopadłe do prostej $y = -1{,}5x + 6$.

k: $y = -3 + \frac{4}{6}x$

l: $3y - 2x - 1 = 0$

m: $-6y + 4x - 3 = 0$

n: $-3x + 2y + 6 = 0$

o: $3y + 2x + 6 = 0$

41. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej l.

a) l: $y = 2x + 7$, $A(3, -1)$

c) l: $y = -\frac{2}{5}x + 3$, $A(-3, -\frac{1}{2})$

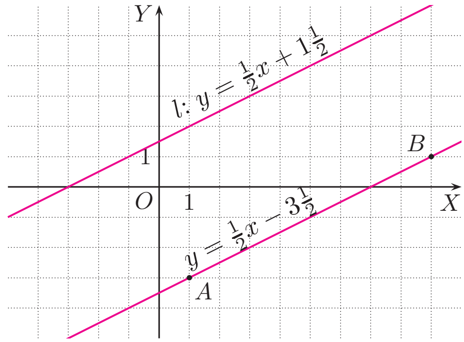
b) l: $y = -6x + 1$, $A(12, 7)$

d) l: $y = 1{,}5x - \sqrt{3}$, $A(6, -5)$

42. Punkty $A(1,-3)$ i $B(9,1)$ są sąsiednimi wierzchołkami prostokąta. Wierzchołki C i D tego prostokąta należą do prostej l.

a) Wyznacz równania prostych, w których zawarte są boki BC i AD tego prostokąta.

b) Naszkicuj te proste. Odczytaj współrzędne wierzchołków C i D oraz oblicz pole tego prostokąta.



3.8. Układy równań liniowych (1)

43. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -2x + 8 \\ 4x - (-2x + 8) = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

44. Zapisz i rozwiąż metodą podstawiania układ równań dotyczący liczb x i y.

a) Suma liczb x i y jest równa 4, a różnica połowy liczby x i połowy liczby y jest równa 10.

b) Różnica liczb x i y jest równa 3, a suma podwojonej liczby x i potrojonej liczby y jest równa 11.

45. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = -3 \\ 7x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{3} \end{cases}$

3.9. Układy równań liniowych (2)

46. Przeanalizuj przykład, a następnie rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

Przykład

$$\begin{cases} 3x - y = -10 \ / \cdot 2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 2y = -20 \\ \ \ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$7x \qquad = -14$$

Otrzymujemy $x = -2$ i podstawiamy do równania $x + 2y = 6$.

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 3x + 5y = -11 \end{cases}$$

47. Wpisz liczby, przez które należy pomnożyć równania, aby skorzystać z metody przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 3x - 6y = 4 \\ 2x - 2y = 1 \;/ \cdot \square \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \;/ \cdot \square \\ 7x + 3y = 9 \;/ \cdot \square \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - \frac{3}{4}y = 6 \;/ \cdot \square \\ 4x - 6y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 12x - \frac{3}{4}y = -3 \;/ \cdot \square \\ 8x + \frac{5}{6}y = 7 \quad / \cdot \square \end{cases}$

48. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + \frac{1}{2}y = 1 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 8{,}6 \end{cases}$

49. Wskaż układy sprzeczne.

A: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$

C: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

E: $\begin{cases} -x + 3y = 2 \\ 3x - 9y = 6 \end{cases}$

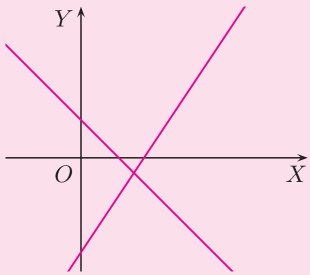
B: $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

D: $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases}$

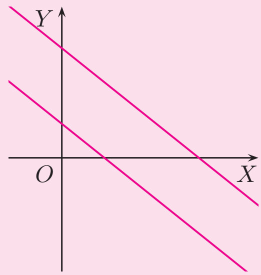
F: $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

3.10. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

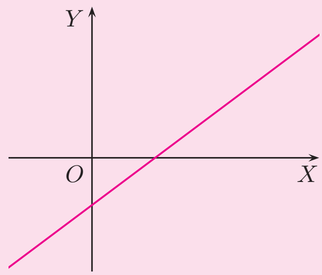
Każde z równań układu równań liniowych opisuje prostą. Położenie dwóch prostych na płaszczyźnie może być następujące:



Proste przecinają się w jednym punkcie – układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, czyli jest **oznaczony**.



Proste są równoległe i różne – układ nie ma rozwiązań, czyli jest **sprzeczny**.



Proste pokrywają się – układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, czyli jest **nieoznaczony**.

50. Rozwiąż graficznie układ równań.

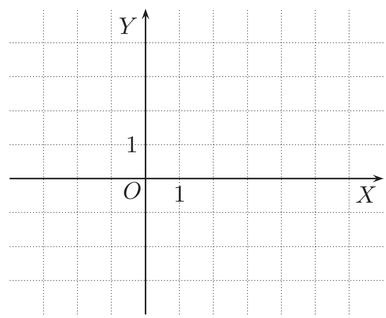
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

Przekształć równania do postaci kierunkowej. Uzupełnij tabele i naszkicuj proste.

$$\begin{cases} y = \_\_\_\_\_\_ \\ y = \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

x		
y		

x		
y		



Odczytaj współrzędne punktu przecięcia prostych. $\begin{cases} x = \_\_\_\_ \\ y = \_\_\_\_ \end{cases}$

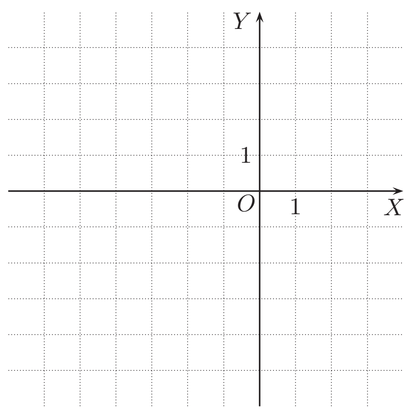
51. Boki trójkąta są zawarte w prostych:
l_1: $2x + y = 4$, l_2: $x - y = -1$, l_3: $x - 3y = 9$.
Naszkicuj te proste i odczytaj współrzędne wierzchołków trójkąta.

l_1: ______ l_2: ______ l_3: ______

x		
y		

x		
y		

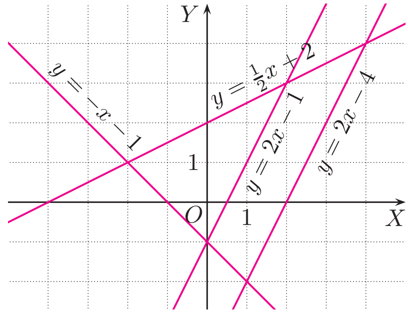
x		
y		



Wierzchołki: ________________

52. Odczytaj z rysunku rozwiązanie danego układu równań. Podstaw współrzędne otrzymanego punktu do układu i sprawdź, czy jest to jego rozwiązanie.

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$



53. Przekształć równania układu do postaci kierunkowej. Korzystając z rysunku, odpowiedz, czy układ jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Jeśli istnieje rozwiązanie układu, podaj je.

a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

54. Rozwiąż graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} -3x + y = -5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

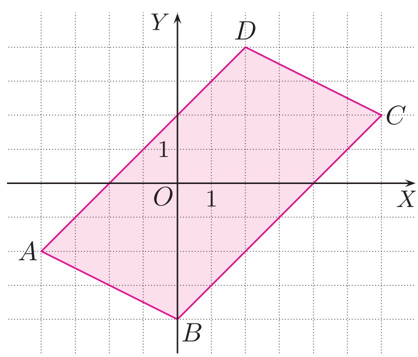
55. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

56. Punkty A, B, C, D są wierzchołkami równoległoboku (rysunek obok). Zapisz równania prostych:

a) AD i BC, b) AB i AD.

Czy utworzony układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny?



57. Sprawdź rachunkowo, czy przekątne równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok) przecinają się w punkcie $(1, 0)$.

3.11. Funkcja liniowa – zastosowania

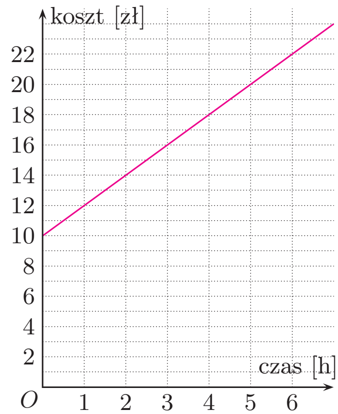
58. Przeczytaj informacje dotyczące warunków wypożyczenia rowerów w wypożyczalniach „Wagabunda” i „Szprycha”.

WYPOŻYCZALNIA „WAGABUNDA”	WYPOŻYCZALNIA „SZPRYCHA”
• Rower górski 10 zł + 2 zł za każdą godzinę • Rower dziecięcy 6 zł + 2 zł za każdą godzinę	• Rower górski 6 zł + 3 zł za każdą godzinę • Rower dziecięcy 2 zł + 3 zł za każdą godzinę

Na wykresie obok przedstawiono koszt wypożyczenia roweru górskiego w wypożyczalni „Wagabunda” w zależności od czasu.

a) Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych analogiczny wykres dla wypożyczalni „Szprycha”.

b) Odczytaj z otrzymanych wykresów, przy jakiej liczbie godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru z wypożyczalni „Wagabunda”, a przy jakiej z wypożyczalni „Szprycha”.



59. Chcemy wypożyczyć dwa rowery górskie i jeden rower dziecięcy. Naszkicuj wykres pokazujący zależność kosztu od czasu wypożyczenia, jeśli korzystamy z wypożyczalni (patrz ćwiczenie 59):

a) „Wagabunda”, b) „Szprycha”.

Odczytaj z otrzymanych wykresów, przy jakiej liczbie godzin korzystniejsza jest oferta wypożyczalni „Wagabunda”.

60. Piotr i Stefan wyruszają na wycieczkę rowerową do miasta C o tej samej godzinie. Piotr startuje z miasta B i jedzie ze stałą szybkością 15 km/h, a Stefan z miasta A i jedzie ze stałą szybkością 22,5 km/h.

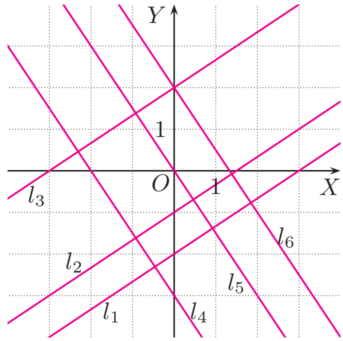
a) Naszkicuj wykres pokazujący odległość Piotra od miasta C w zależności od czasu oraz w tym samym układzie współrzędnych – wykres pokazujący odległość Stefana od miasta C w zależności od czasu.

b) Po jakim czasie Stefan dogoni Piotra?

c) O ile Piotr musiałby zwiększyć swoją średnią szybkość, aby Stefan dogonił go dopiero w mieście C?

Zestaw powtórzeniowy I

61. Prosta l_1 określona jest równaniem $y = \frac{2}{3}x - 2$. Podaj równania pozostałych prostych, jeśli proste l_2 i l_3 są równoległe do prostej l_1, a proste l_4, l_5 i l_6 są do niej prostopadłe (patrz rysunek).



62. Dane są proste k: $y = 2x + 6$ i l: $y = -2x - 2$. Naszkicuj proste k i l oraz proste k_1 i l_1 będące obrazami odpowiednio prostych k i l w symetrii względem osi OY.

a) Podaj równania prostych k_1 i l_1.

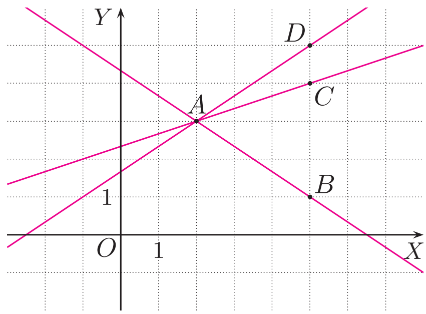
b) Oblicz pole i obwód figury ograniczonej prostymi k, l, k_1 i l_1.

63. Dane są punkty: $A(2,3)$, $B(5,1)$, $C(5,4)$ i $D(5,5)$ (rysunek obok).

a) Wyznacz współczynniki kierunkowe prostych AB, AC i AD.

b) Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i prostą AB.

c) Dla jakich argumentów funkcja, której wykresem jest prosta AC, przyjmuje wartości ujemne?



64. a) Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki trójkąta o wierzchołkach: $A(-3,2)$, $B(1,-6)$, $C(9,6)$.

b) Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki trapezu o wierzchołkach: $A(-2,-3)$, $B(6,3)$, $C(-1,4)$, $D(-5,1)$. Czy jest to trapez prostokątny?

65. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.

a) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = -3 \\ 2x - 3y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 3y = -10 \end{cases}$

66. Rozwiąż algebraicznie układ równań.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -4{,}6 \\ 3x + 5y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-y-2}{2} - \dfrac{x+y}{4} = 1 \\ \dfrac{2x+y-1}{3} - \dfrac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{y+6}{3} + \dfrac{x}{4} = 5 - 2x \\ \dfrac{2y-3x}{4} = \dfrac{2}{3}y - 1 \end{cases}$

67. Boki trójkąta są zawarte w prostych: $4x - 3y + 6 = 0$, $3x + 4y - 8 = 0$ oraz $7x + y - 27 = 0$. Uzasadnij, że trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz współrzędne jego wierzchołków.

Zestaw powtórzeniowy II

68. Wyznacz wzór funkcji liniowej, jeśli przyjmuje ona wartości:

a) ujemne tylko dla $x \in (4; \infty)$, a prosta będąca jej wykresem jest prostopadła do prostej $y = 3x + 6$,

b) nieujemne tylko dla $x \leqslant -6$, a prosta będąca jej wykresem jest równoległa do prostej $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 3 = 0$.

69. Podaj wzór funkcji liniowej, jeśli prosta będąca jej wykresem:

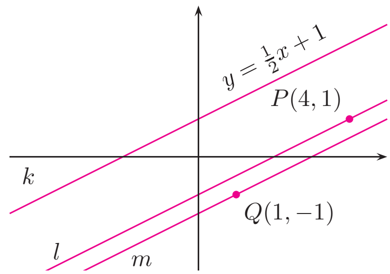
a) przecina osie układu współrzędnych w punktach $(0, -7)$ i $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$,

b) przechodzi przez punkt $\left(-3, 2\frac{1}{4}\right)$ i nie przecina osi OX,

c) przecina oś OX w punkcie $(-3, 0)$ i wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu 6,

* d) ma współczynnik kierunkowy równy 2 i wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu 4.

70. Proste k, l i m są równoległe. Zaznacz litery umieszczone w tabeli nad współrzędnymi punktów należących do jednej z prostych k, l, m, a otrzymasz nazwisko wybitnego matematyka francuskiego, współtwórcy podstaw współczesnej algebry. Matematyk ten zginął w pojedynku w 1832 r. Miał wtedy 21 lat.



G	E	A	L	M	N	O	I	R	S
$(8, 5)$	$(2, 3)$	$(-6, -4)$	$(-6, -2)$	$(4, 2)$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(7, 2)$	$(-9, -6)$	$(1, -2)$	$(-2, 0)$

71. Dane są liczby m_1 i m_2. Dla każdej z nich sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = m \end{cases}$ $\quad m_1 = -10,\ m_2 = 0$

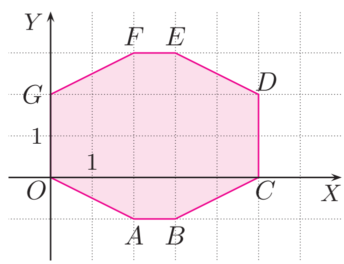
b) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ mx + 3y = 6 \end{cases}$ $\quad m_1 = 1,\ m_2 = \frac{9}{2}$

c) $\begin{cases} 3x + y = m \\ (m^2 - 1)x + y = 2 \end{cases}$ $\quad m_1 = -2,\ m_2 = 2$

72. a) Wyznacz równania prostych zawierających boki ośmiokąta $ABCDEFGO$.

b) Dla jakich wartości parametru m prosta $y = mx$ zawiera przekątną tego ośmiokąta?

c) Uzasadnij, że przekątne GC i AD nie są prostopadłe.



4. Funkcje

4.1. Dziedzina i miejsca zerowe funkcji

Określając dziedzinę funkcji danej wzorem, przyjmujemy, że jest ona zbiorem wszystkich argumentów, dla których ten wzór ma sens.

1. Określ dziedzinę funkcji f (zwróć uwagę na to, że mianownik nie może być równy 0).

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{x}{x+3}$

d) $f(x) = \frac{1}{2x-6}$

e) $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$

f) $f(x) = \frac{x}{0{,}5x+2}$

2. Określ dziedzinę funkcji f (zwróć uwagę na to, że pod pierwiastkiem nie może wystąpić liczba ujemna).

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $x - 1 \geqslant 0$, skąd $x \geqslant 1$, czyli $D_f = \langle 1; \infty)$

b) $f(x) = \sqrt{x+5}$

c) $f(x) = \sqrt{2-x}$

d) $f(x) = \sqrt{4 + \frac{1}{2}x}$

3. Określ dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ $x - 1 > 0$, skąd $x > 1$, czyli $D_f = (1; \infty)$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$

4. Określ dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x(x+4)}$

d) $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)(x+6)}$

5. Skreśl liczby nienależące do dziedziny funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - x}$, $\quad -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$

c) $f(x) = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$, $\quad -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$

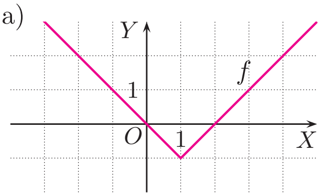
b) $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 + x}$, $\quad -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$

d) $f(x) = \frac{x^2}{(2x+1)^2}$, $\quad -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$

Miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$ nazywamy taką wartość argumentu x, dla której $f(x) = 0$.

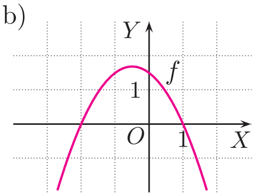
6. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f.

a)

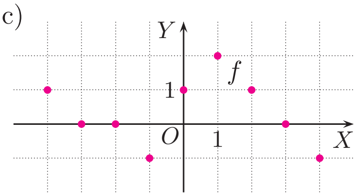


$x = 0,\ x = 2$

b)



c)



7. Określ dziedzinę funkcji f i sprawdź, która z liczb: -3, 3 jest miejscem zerowym tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ $\quad D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, miejsce zerowe: $x = 3$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x(x-3)}$

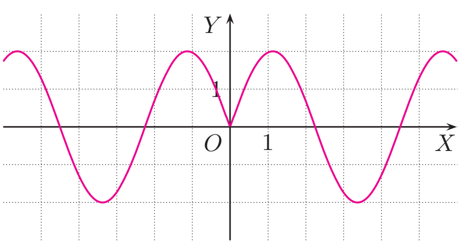
c) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x(x+3)}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x+3)(x-3)}$

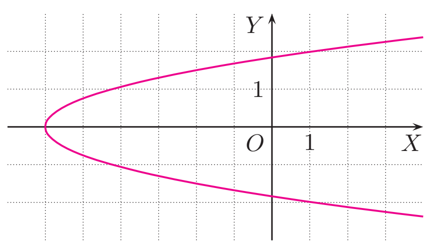
4.2. Szkicowanie wykresu funkcji

8. Czy na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji?

a) ______

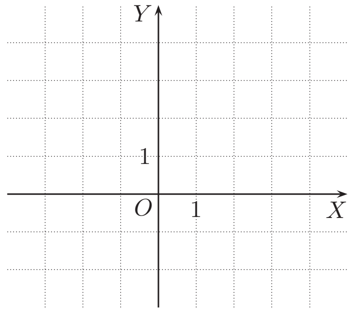


b) ______



9. a) Uzupełnij tabelę i naszkicuj wykres funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } \ x < 2 \\ 3 & \text{dla } \ x \geqslant 2 \end{cases}$$



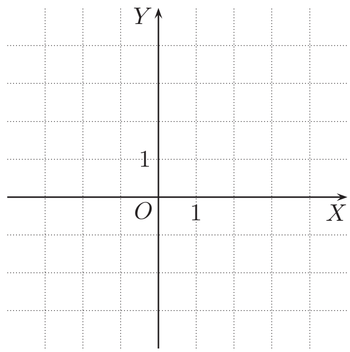
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

Podkreśl te spośród podanych punktów, które należą do wykresu funkcji f.

$P(-6,-5)$ $\quad$ $Q\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $R(11,3)$

b) Uzupełnij tabelę i naszkicuj wykres funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } \ x < 1 \\ -x+2 & \text{dla } \ x \geqslant 1 \end{cases}$$



x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

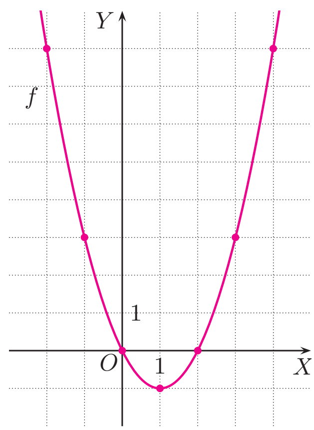
Podkreśl te spośród podanych punktów, które należą do wykresu funkcji f.

$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\quad$ $Q(15,-13)$ $\quad$ $R\left(\frac{94}{7}, \frac{106}{7}\right)$

10. Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } \ x < -1 \\ x & \text{dla } \ -1 \leqslant x < 2 \\ 2 & \text{dla } \ x \geqslant 2 \end{cases}$$

11. a) Uzupełnij tabelę, korzystając z wykresu funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.



x	-2	-1	0		2	3	4
$f(x)$			0	-1			8

b) Który z poniższych wzorów może być wzorem funkcji f?

$y = x^2 - 2$ $\quad$ $y = (x-2)^2$

$y = x^2$ $\quad$ $y = x^2 - 1$ $\quad$ $y = x^2 - 2x$

12. Skreśl punkty, które nie należą do wykresu funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4$.

$A(-2,0)$ $\quad$ $B(-1,-5)$ $\quad$ $C(1,-3)$ $\quad$ $D\left(-\frac{1}{2}, -4\frac{1}{4}\right)$ $\quad$ $E\left(\frac{1}{2}, -3\frac{3}{4}\right)$

4.3. Monotoniczność funkcji

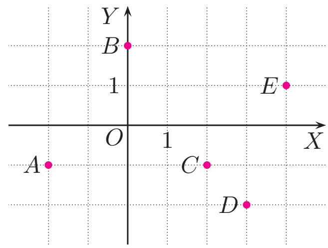
Funkcję $f\colon X \to \mathbf{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcję $f : X \to \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

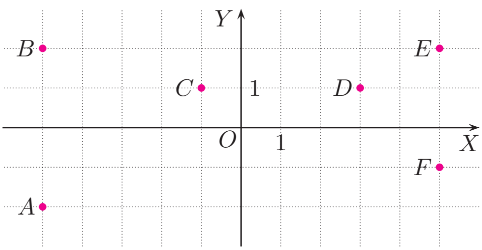
$$\text{jeżeli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$

13. a) Które pary punktów mogą należeć do wykresu funkcji rosnącej?



b) Które pary punktów mogą należeć do wykresu funkcji malejącej?

14. a) Naszkicuj wykres funkcji niemalejącej $f\colon \langle -5; 5\rangle \to \mathbf{R}$ tak, aby należały do niego cztery spośród punktów A–F.



Funkcję $f : X \to \mathbf{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

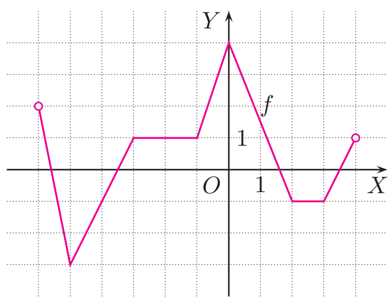
Funkcję $f : X \to \mathbf{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

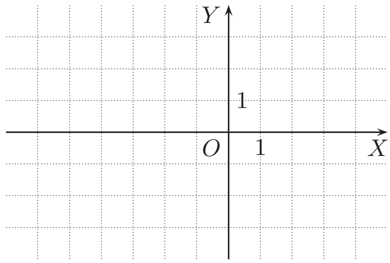
b) Czy można naszkicować wykres funkcji nierosnącej $f\colon \langle -5; 5\rangle \to \mathbf{R}$ tak, aby należały do niego cztery spośród punktów A–F?

15. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon (-6; 4) \to \mathbf{R}$. Wskaż zdania prawdziwe.

- ☐ A. f jest nierosnąca w przedziale $(0; 3\rangle$.
- ☐ B. f jest nierosnąca w przedziale $(0; 4)$.
- ☐ C. f jest malejąca w przedziale $(0; 2\rangle$.
- ☐ D. f jest niemalejąca w przedziale $(-5; -1)$.
- ☐ E. f jest niemalejąca w przedziale $(-5; 0)$.
- ☐ F. f jest rosnąca w przedziale $(-4; -2)$.

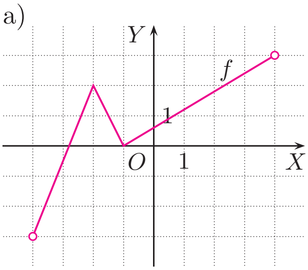


16. Naszkicuj wykres funkcji $f: (-6; 4) \rightarrow \mathbf{R}$, która jest stała w przedziałach $(-6; -3\rangle$ i $\langle 0; 2\rangle$, maleje w przedziale $\langle -3; 0\rangle$ oraz rośnie w przedziale $\langle 2; 4)$.

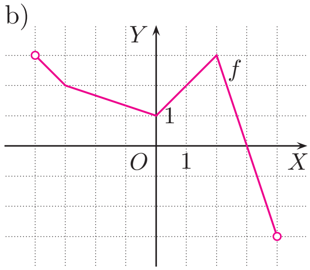


17. Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbf{R}$, korzystając z jej wykresu.

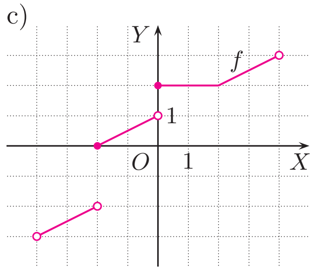
a)



b)



c)

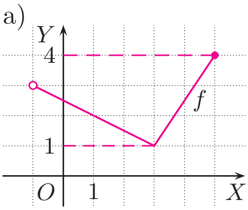


4.4. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

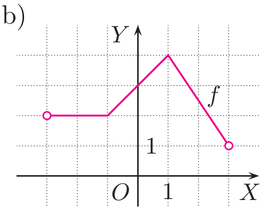
Zbiór wartości funkcji $f: X \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$.

18. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę i zbiór wartości.

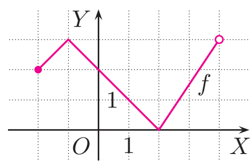
a)



b)



c)



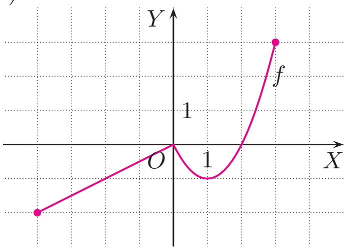
19. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji f, której dziedziną jest zbiór X, a zbiorem wartości zbiór Y.

a) $X = (-3; -2)$, $Y = \langle 1; 4\rangle$

b) $X = \langle -2; 4\rangle$, $Y = (-2; 4)$

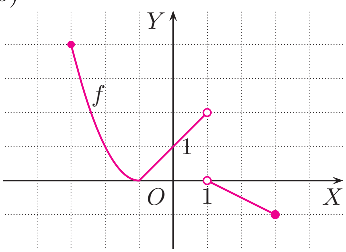
20. Uzupełnij poniższe informacje na podstawie wykresu funkcji f.

a)



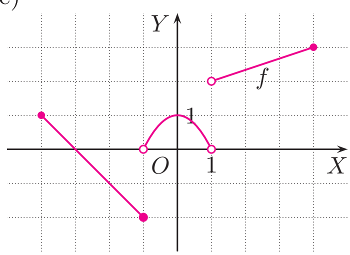
- dziedzina: ______
- zbiór wartości: ______
- miejsca zerowe: $x = 0$ oraz $x = 2$
- funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość ______ dla argumentu ______ oraz największą wartość ______ dla argumentu ______

b)



- dziedzina: ______
- zbiór wartości: ______
- miejsca zerowe: ______
- funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość ______ dla argumentu ______ oraz największą wartość ______ dla argumentu ______

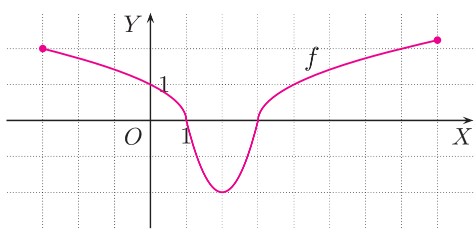
c)



- dziedzina: ______
- zbiór wartości: ______
- miejsca zerowe: ______
- funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość ______ dla argumentu ______ oraz największą wartość ______ dla argumentu ______

21. Dany jest wykres funkcji $f\colon \langle -3; 8\rangle \to \mathbf{R}$. Uzupełnij tabelę.

Przedział	Wartość	
	najmniejsza	największa
$\langle -3; 0\rangle$		
$\langle 0; 8\rangle$		
$\langle 2; 4\rangle$	-2	



22. Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f o podanej dziedzinie. Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f i jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = 2x - 3$, $D_f = \langle -1; 4\rangle$

b) $f(x) = -x + 1$, $D_f = \langle -4; 3\rangle$

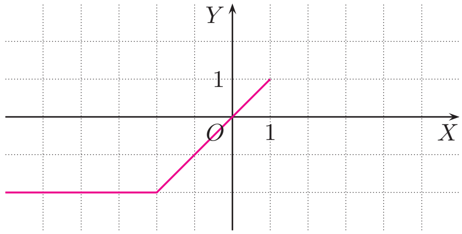
c) $f(x) = |x| - 1$, $D_f = \langle -3; 3\rangle$

d) $f(x) = |x| - 2$, $D_f = \langle -6; 6\rangle$

4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

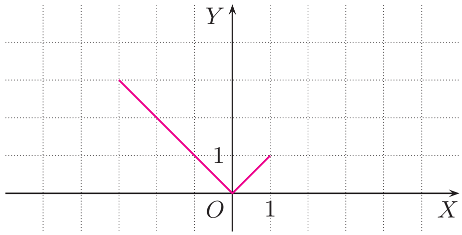
23. Uzupełnij wykres funkcji f. Odczytaj z niego zbiór wartości tej funkcji i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ x & \text{dla } x \in (-2; 1\rangle \\ 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$



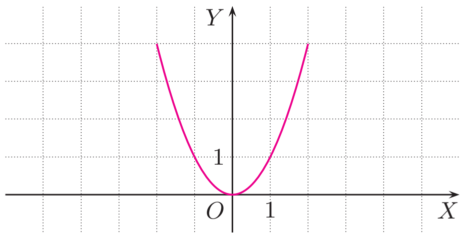
- zbiór wartości: ______________________
- $f(x) \leqslant 1$ dla ______________________

b) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3\rangle \\ |x| & \text{dla } x \in (-3; 1\rangle \\ 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$



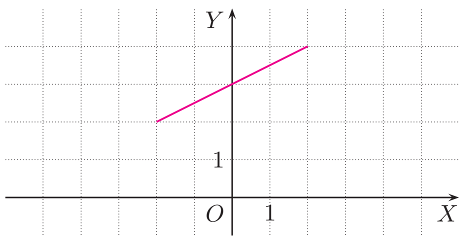
- zbiór wartości: ______________________
- $f(x) \leqslant 1$ dla ______________________

c) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ x^2 & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$



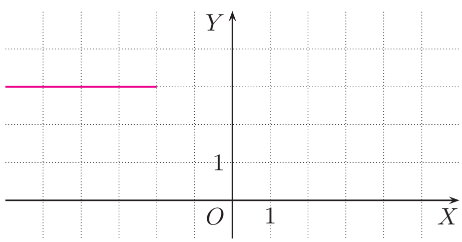
- zbiór wartości: ______________________
- $f(x) \leqslant 1$ dla ______________________

d) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ -x + 6 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$



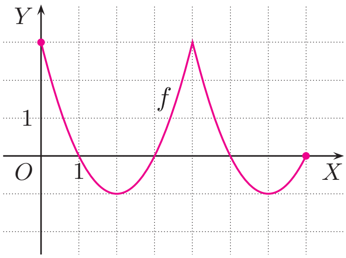
- zbiór wartości: ______________________
- $f(x) \leqslant 1$ dla ______________________

e) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ -x + 1 & \text{dla } x \in \langle -2; 1\rangle \\ x - 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

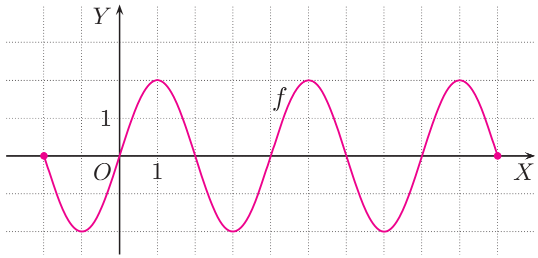


- zbiór wartości: ______________________
- $f(x) \leqslant 1$ dla ______________________

24. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant 0$.

a) 

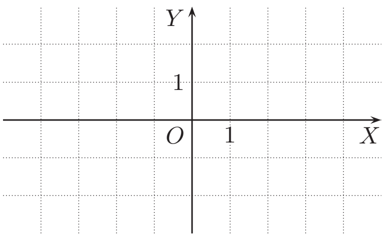
- dziedzina:
- $f(x) < 0$ dla
- $f(x) \geqslant 0$ dla

b) 

- dziedzina:
- $f(x) < 0$ dla
- $f(x) \geqslant 0$ dla

25. Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania $f(x) = -1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant -1$.

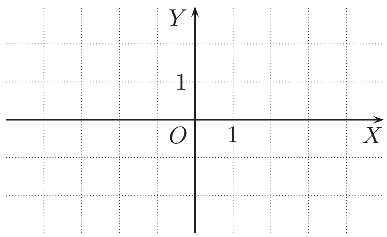
a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; 2\rangle \\ 1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$



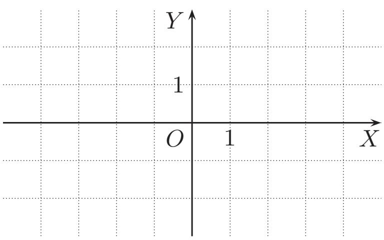
$f(x) = -1$ dla

$f(x) \geqslant -1$ dla

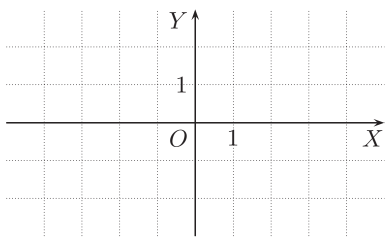
c) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ x & \text{dla } x \in (-2; \infty) \end{cases}$



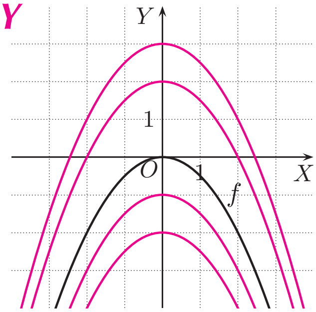
b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3\rangle \\ -1 & \text{dla } x \in (-3; \infty) \end{cases}$



d) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1\rangle \\ -x & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$



4.6. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi *OY*



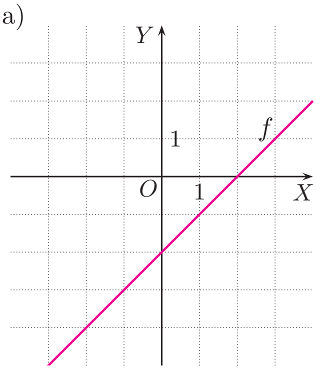
26. Na rysunku obok kolorem czarnym narysowano wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Podpisz pozostałe wykresy.

$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ $\qquad$ $l(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

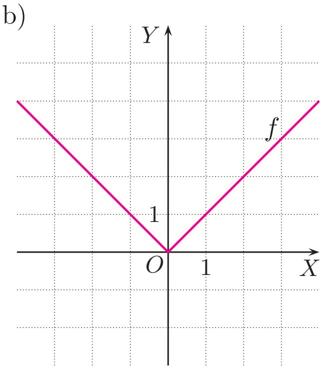
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ $\qquad$ $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$

27. Naszkicuj na rysunku przedstawiającym wykres funkcji f wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 3$ i $h(x) = f(x) - 2$.

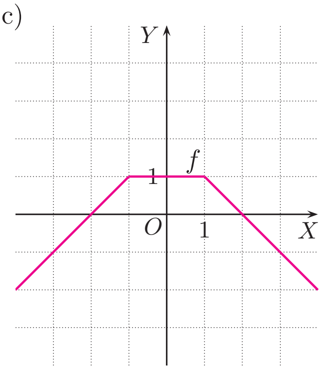
a)



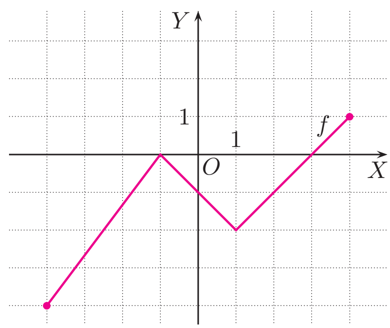
b)



c)



28. Dany jest wykres funkcji $f\colon \langle -4; 4\rangle \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) + 2$, a następnie odczytaj z niego:



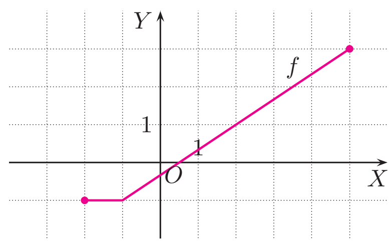
a) miejsca zerowe funkcji g,

____

b) zbiór argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartości dodatnie.

____

29. Dany jest wykres funkcji $f\colon \langle -2; 5\rangle \to \mathbf{R}$, której zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 3\rangle$. Podaj zbiór wartości funkcji:

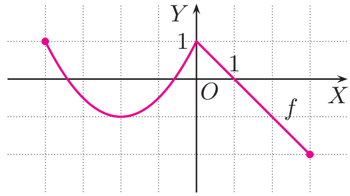


a) $g(x) = f(x) + 1$ ____________________

b) $h(x) = f(x) + 3$ ____________________

c) $k(x) = f(x) - 2$ ____________________

30. Dany jest wykres funkcji $f\colon \langle -4; 3\rangle \to \mathbf{R}$. Dla jakiej wartości parametru a punkt P należy do wykresu funkcji $y = f(x) + a$?

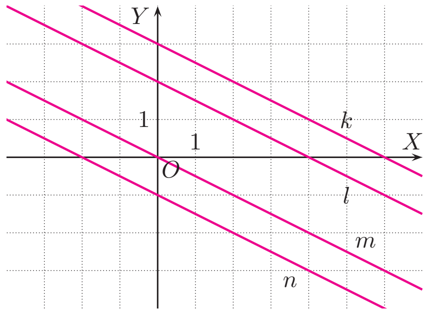


a) $P(0, 3)$ __________

b) $P(3, 1)$ __________

c) $P(-4, -2)$ __________

31. Przedstawione na rysunku proste k, l, m i n są równoległe. Prosta l jest wykresem funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Podaj wzory pozostałych prostych.

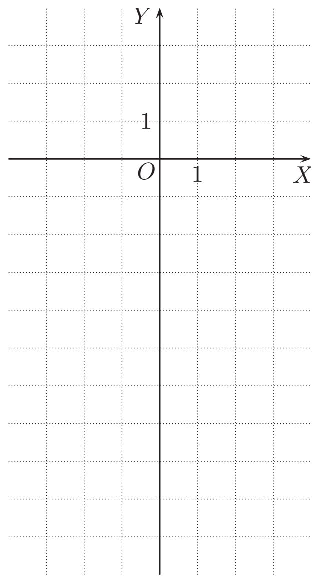


k: __________

m: __________

n: __________

32. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2$. Stosując odpowiednie przesunięcia, naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = -x^2 + 3$ oraz $h(x) = -x^2 - 2$. Podaj zbiory wartości funkcji f, g i h.



Zbiór wartości funkcji f: __________

Zbiór wartości funkcji g: __________

Zbiór wartości funkcji h: __________

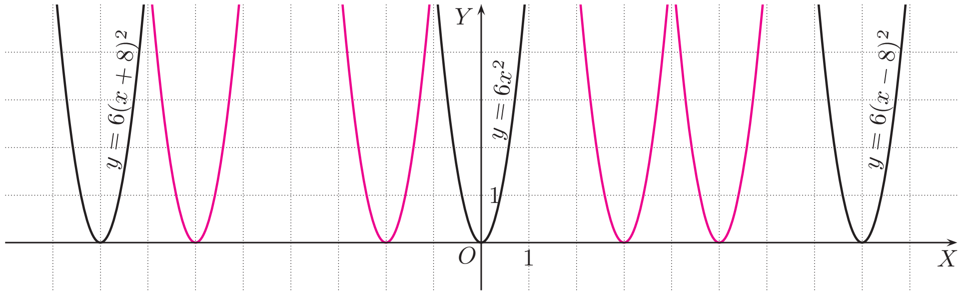
33. a) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x|$. Dla jakiej wartości a miejscami zerowymi funkcji $g(x) = f(x) + a$ są liczby -3 i 3? Naszkicuj wykres funkcji g.

b) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$. Dla jakiej wartości a miejscami zerowymi funkcji $g(x) = f(x) + a$ są liczby -2 i 2? Naszkicuj wykres funkcji g.

34. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x| - 1$. Stosując odpowiednie przesunięcia, naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 1$ oraz $h(x) = f(x) - 4$. Podaj zbiory rozwiązań nierówności $g(x) \leqslant 0$ oraz $h(x) < 0$.

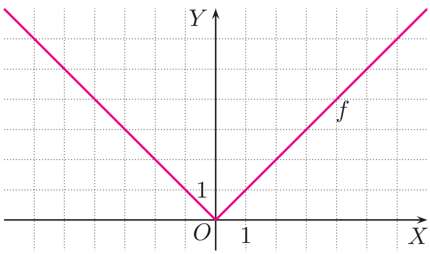
4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi *OX*

35. Na rysunku przedstawiono wykresy siedmiu funkcji. Trzy z nich podpisano. Podpisz pozostałe cztery wykresy.

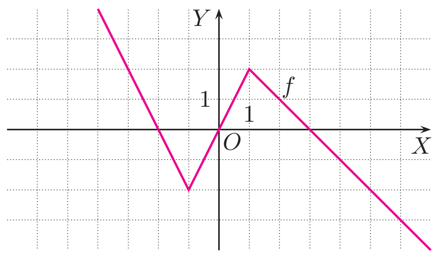


36. Naszkicuj na rysunku przedstawiającym wykres funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ wykresy funkcji $g(x) = f(x-2)$ i $h(x) = f(x+3)$.

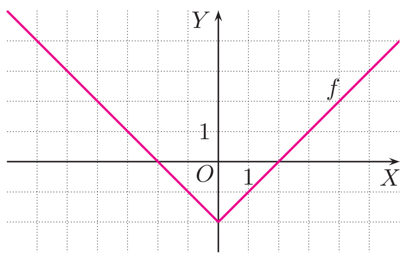
a)



b)



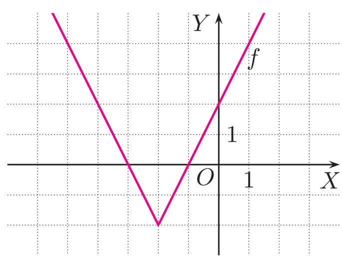
37. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x-1)$ oraz $h(x) = f(x+2)$. Dla jakich argumentów x zachodzi podana nierówność?



a) $g(x) < 0$ ________________

b) $h(x) \leqslant 0$ ________________

38. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dla jakich argumentów x funkcja g przyjmuje wartości nieujemne?

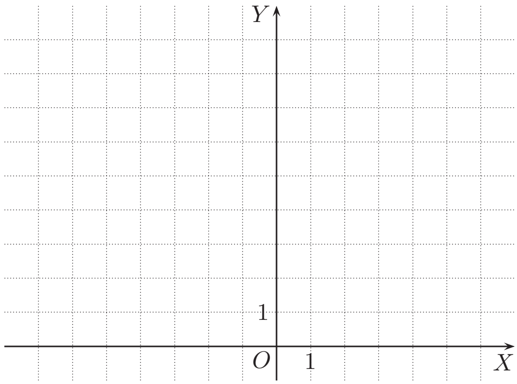


a) $g(x) = f(x-1)$ ________________

b) $g(x) = f(x-14)$ ________________

c) $g(x) = f(x+10)$ ________________

39. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$. Stosując odpowiednie przesunięcia, naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = (x+4)^2$ oraz $h(x) = (x-3)^2$. Odczytaj z wykresów rozwiązania równań: $f(x) = 1$, $g(x) = 1$ oraz $h(x) = 1$.



$f(x) = 1$ dla $x = -1$, $x = 1$

$g(x) = 1$ dla

$h(x) = 1$ dla

40. Wykres funkcji g otrzymujemy przesuwając wykres funkcji $f(x) = x^2$ o p jednostek w prawo. Ile wynosi p, jeśli:

a) miejscem zerowym funkcji g jest liczba 7, $p =$

b) równanie $g(x) = 1$ jest spełnione dla $x = 0$ i $x = 2$, $p =$

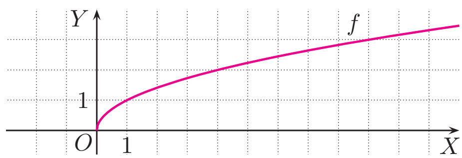
c) równanie $g(x) = 4$ jest spełnione dla $x = -1$ i $x = 3$? $p =$

41. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle 0; \infty) \to \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = \sqrt{x-1}$ i $h(x) = \sqrt{x+2}$.

a) Podaj dziedziny funkcji g i h.

$D_g =$

$D_h =$



b) Dla jakich x spełnione jest równanie $g(x) = 2$?

c) Dla jakich x zachodzi nierówność $h(x) \geqslant 3$?

42. Podaj wzór funkcji g, której wykres otrzymano z wykresu funkcji $f(x) = 5x^3$ przez przesunięcie:

a) o 3 jednostki w górę,

c) o 4 jednostki w prawo,

$g(x) = 5(x-4)^3$

b) o 2 jednostki w dół,

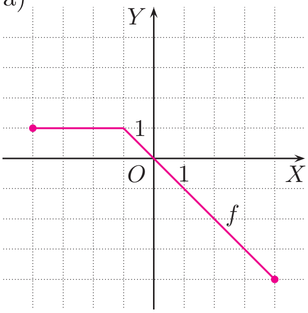
d) o 1 jednostkę w lewo.

4.8. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi *OX*

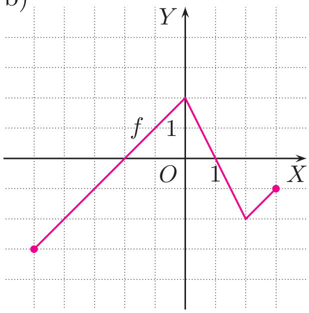
43. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicuj na tym samym rysunku wykres funkcji $y = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i $-f$.

> Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy, odbijając wykres funkcji $y = f(x)$ symetrycznie względem osi OX.

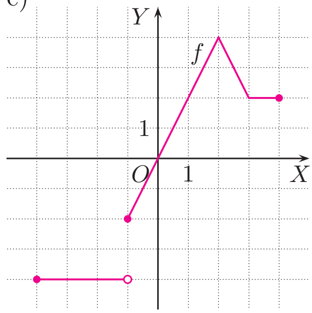
a)



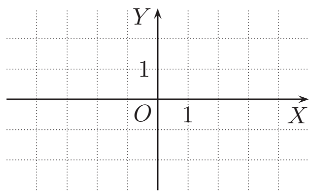
b)



c)

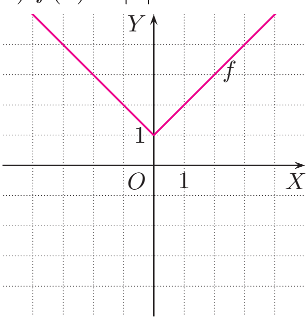


44. W układzie współrzędnych obok naszkicuj wykres dowolnej funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest przedział $\langle -4; 4\rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle -1; 2\rangle$ oraz wykres funkcji $g(x) = -f(x)$.
Podaj zbiór wartości funkcji g: ______________.

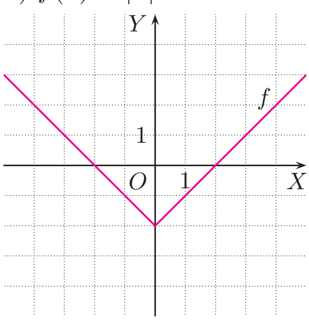


45. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x-2)$ oraz $h(x) = -f(x-2)$, mając dany wykres funkcji f. Podaj wzory funkcji g i h.

a) $f(x) = |x| + 1$

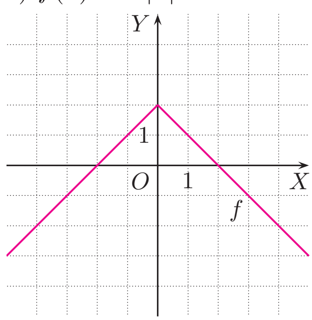


b) $f(x) = |x| - 2$



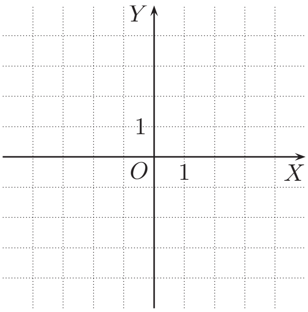
$g(x) = |x-2| - 2$

c) $f(x) = -|x| + 2$

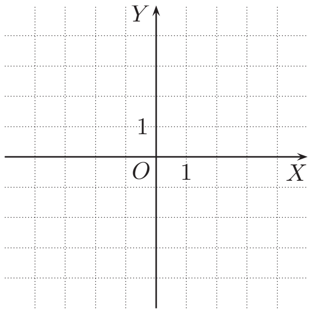


46. Naszkicuj kolejno wykresy funkcji: $y = f(x)$, $g(x) = f(x+1)$, $h(x) = -g(x)$. Podaj wzory funkcji g i h.

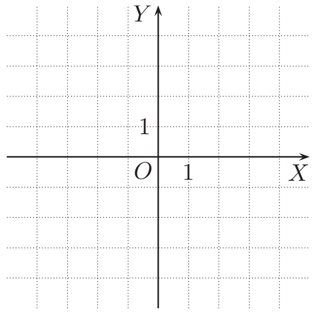
a) $f(x) = |x|$



b) $f(x) = |x| - 3$



c) $f(x) = -|x|$

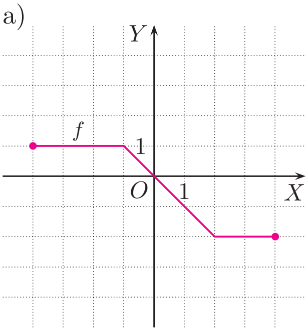


$g(x) = -|x+1|$

$h(x) = |x+1|$

47. Dany jest wykres funkcji f. W tym samym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji g i h. Podaj zbiory wartości funkcji g i h.

a)



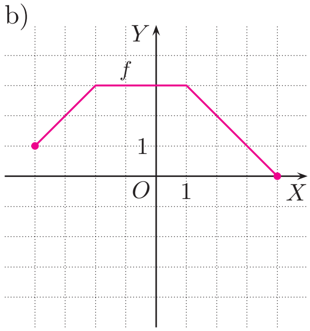
$g(x) = f(x) + 1$

zbiór wartości funkcji g:

$h(x) = -g(x)$

zbiór wartości funkcji h:

b)



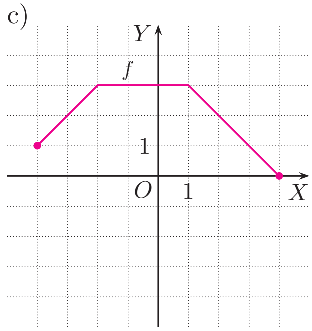
$g(x) = f(x) - 1$

zbiór wartości funkcji g:

$h(x) = -g(x)$

zbiór wartości funkcji h:

c)



$g(x) = -f(x)$

zbiór wartości funkcji g:

$h(x) = g(x) - 1$

zbiór wartości funkcji h:

48. Naszkicuj wykres funkcji f.

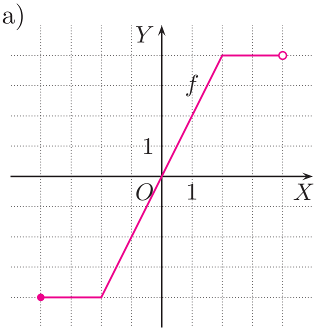
a) $f(x) = -|x+2|$ b) $f(x) = -|x-1|$ c) $f(x) = -|x-4| + 2$

4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi *OY*

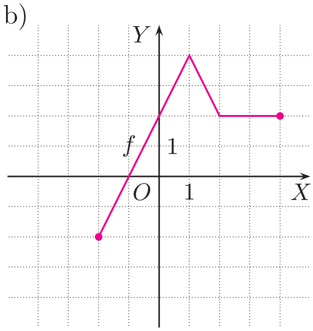
49. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicuj na tym samym rysunku wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj dziedziny funkcji f i g.

> Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy, odbijając wykres funkcji $y = f(x)$ symetrycznie względem osi OY.

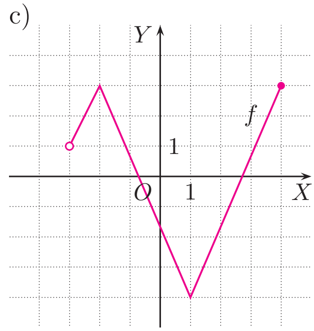
a)



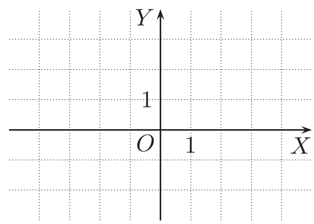
b)



c)

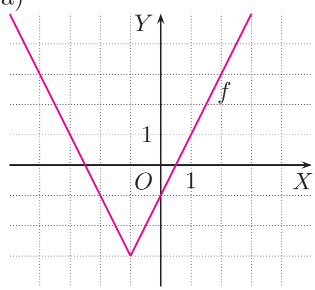


50. W układzie współrzędnych obok naszkicuj wykres dowolnej funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest przedział $\langle -2; 4\rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle -2; 3\rangle$ oraz wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.
Podaj dziedzinę funkcji g: ______________.

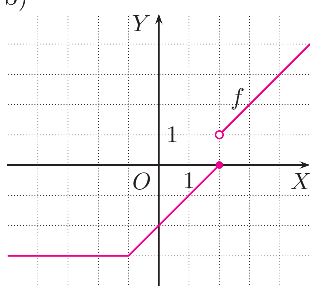


51. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Naszkicuj na tym samym rysunku wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Odczytaj z wykresu zbiory rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant -1$ oraz $g(x) \leqslant -1$.

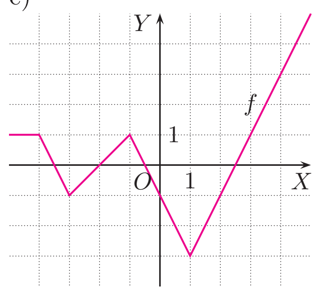
a)



b)



c)

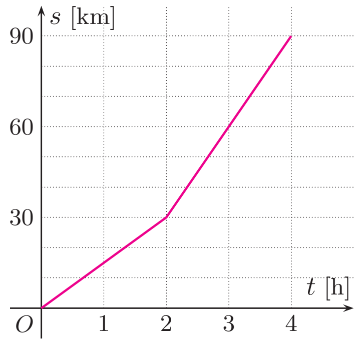


$f(x) \leqslant -1$ dla $x \in \langle -2; 0\rangle$

$g(x) \leqslant -1$ dla

4.10. Funkcje – zastosowania

52. Dwóch rowerzystów A i B wyruszyło o godzinie 10.00 na wycieczkę tą samą trasą. Na rysunku przedstawiono wykres zależności drogi przebytej przez rowerzystę A od czasu.

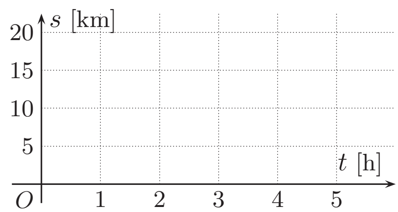


a) Odczytaj z wykresu, z jaką prędkością poruszał się rowerzysta A w ciągu pierwszych dwóch godzin jazdy, a z jaką w ciągu dwóch następnych.

b) Rowerzysta B przez pierwszą godzinę jechał z prędkością 30 km/h, a następnie zwolnił do 15 km/h i jechał z tą prędkością przez 3 godziny. Naszkicuj na rysunku obok wykres drogi przebytej przez tego rowerzystę w zależności od czasu.

c) O której godzinie rowerzysta A wyprzedził rowerzystę B? Jaka była odległość między nimi o godzinie 14.00?

53. Przez pierwsze dwie godziny turysta maszerował z prędkością 5 km/h. Następnie godzinę odpoczywał i kolejne dwie godziny szedł z prędkością 2,5 km/h. Naszkicuj wykres pokazujący zależność pokonanej drogi od czasu.

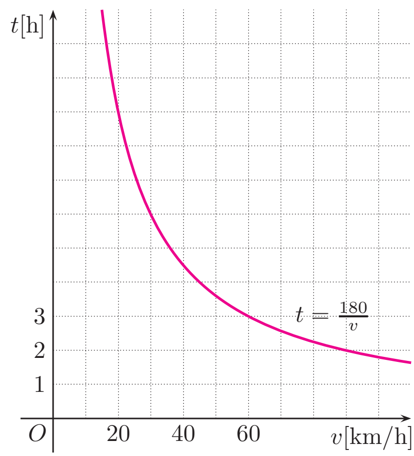


54. Odległość między miastami A i B jest równa 180 km. Czas t (w godzinach) potrzebny na przebycie tej drogi samochodem jadącym ze średnią prędkością v [km/h] można obliczyć na podstawie wzoru $t = \frac{180}{v}$.

a) Uzupełnij tabelę.

v [km/h]	30	40		90
t [h]			3	

b) Które z punktów: $K(45, 4)$, $L\left(54, \frac{7}{2}\right)$, $M\left(72, \frac{5}{2}\right)$ należą do wykresu przedstawionego na rysunku?



55. Zależność między średnią prędkością v [km/h] a czasem t [h] potrzebnym do przebycia drogi 240 km opisuje wzór $t = \frac{240}{v}$. Sporządź tabelę i odpowiedni wykres.

Zestaw powtórzeniowy I

56. Naszkicuj wykres funkcji $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbf{R}$, która każdemu argumentowi przyporządkowuje: a) liczbę o połowę mniejszą, b) jego odwrotność.
Czy jest to funkcja monotoniczna?

57. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$ o podanej dziedzinie D i określ zbiór wartości tej funkcji.

a) $D = \mathbf{R}$
b) $D = (0; \infty)$
c) $D = (-\infty; 1\rangle$
d) $D = \langle -1; 2\rangle$
e) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
f) $D = \langle -2; -1) \cup (1; 3\rangle$

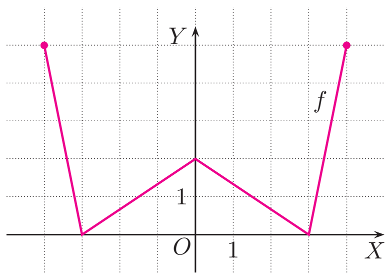
58. Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie odczytaj z niego zbiór wartości funkcji oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant 4$.

a) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -5\rangle \\ -x & \text{dla } x \in (-5; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -1\rangle \\ 4 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$

59. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f : \langle -4; 4\rangle \to \mathbf{R}$. Podaj jej zbiór wartości. Naszkicuj wykres funkcji g, wyznacz jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $g(x) = f(x) + 1$
b) $g(x) = f(x) - 2$
c) $g(x) = f(x - 2)$
d) $g(x) = f(x + 1)$



60. Wpisz w miejsce $\square$ znak $<$ lub $>$.

a) Jeśli f jest funkcją rosnącą i $a > 1$, to $f(a) \; \square \; f(1)$.

b) Jeśli f jest funkcją malejącą i $b < -1$, to $f(b) \; \square \; f(-1)$.

c) Jeśli f jest funkcją rosnącą i $a > b$, to $f(-b) \; \square \; f(-a)$.

d) Jeśli f jest funkcją malejącą i $a > b$, to $f(-b) \; \square \; f(-a)$.

61. Uzasadnij, że jeśli f jest funkcją rosnącą i $a > b > 0$, to $f\left(\frac{1}{a}\right) < f\left(\frac{1}{b}\right)$.

62. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x-2|$. Odczytaj z wykresu wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

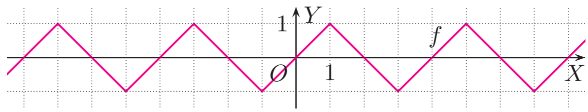
a) $\langle -2; 2\rangle$
b) $\langle 3; 6\rangle$
c) $\langle -1; 4\rangle$

Zestaw powtórzeniowy II

63. Określ dziedzinę funkcji f. Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

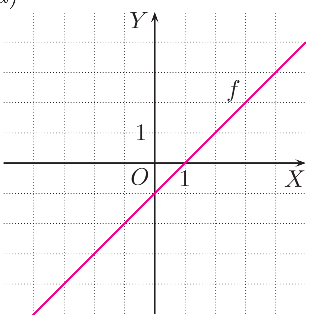
64. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji:



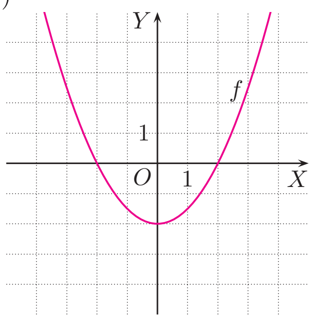
a) $g(x) = f(x) + 1$, b) $g(x) = f(x+1)$, c) $g(x) = -f(x)$.

65. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Naszkicuj na tym samym rysunku wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj wartość największą i wartość najmniejszą funkcji g w przedziale $\langle -2; 2\rangle$.

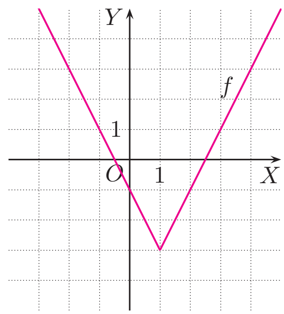
a)



b)



c)



66. Dane są funkcje:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{dla } x > 1 \end{cases} \quad \text{i} \quad g(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \leqslant 1 \\ |x-3|-1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

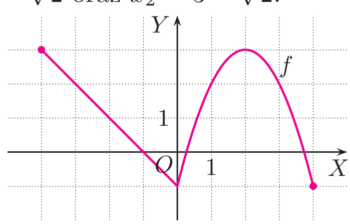
Oblicz wartości funkcji f i g dla argumentów: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ oraz $x_2 = 3 - \sqrt{2}$.

67. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f \colon \langle -4; 4\rangle \to \mathbf{R}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = f(-x)$.

b) Odczytaj rozwiązanie równania:

$$f(x) = f(-x)$$



68. Które spośród liczb $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ należą do dziedziny funkcji f?

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x+2}$ c) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+3}}$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}$

b) $f(x) = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x}$ d) $f(x) = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x-1}}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+2}}$

MATeMAtyka

Nowoczesny i praktyczny zeszyt ćwiczeń dla każdego ucznia

- Sprawdzone narzędzie do pracy na lekcji i do samodzielnej pracy w domu.
- Pełne lub częściowe rozwiązania wspomagające ucznia w nauce.
- Zestawy powtórzeniowe utrwalające wiadomości z każdego działu.

Polecamy:

Podręcznik ***Zbiór zadań***

Solidne powtórzenie na końcu każdego działu

Zadania typu maturalnego

Ciekawe infografiki zachęcające uczniów do samodzielnych poszukiwań

Doskonałe narzędzia zarówno do pracy na lekcji, jak i do samodzielnej pracy w domu

Zadania o zróżnicowanym stopniu trudności

Zadania o podwyższonym stopniu trudności dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką

Do obu zakresów: podstawowego i rozszerzonego

Dla ucznia przygotowaliśmy:

- podręcznik
- zeszyt ćwiczeń
- zbiór zadań
- zbiory zadań maturalnych

Nauczycielom polecamy:

- program nauczania
- książkę nauczyciela
- generator sprawdzianów

www.nowaera.pl matematyka@nowaera.pl
infolinia: 801 88 10 10, 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-0904-3
9 788326 709043